Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica

Pisa, 5 settembre 2024

Esercizio 1 Studiare la funzione

$$f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{2x-8}}$$

determinandone insieme di definizione, continuità e derivabilità, eventuali asintoti (compresi quelli obliqui), estremi superiore e inferiore o massimo e minimo. Determinare gli intervalli di monotonia, gli eventuali punti di massimo e minimo locali, gli intervalli di convessità e concavità e i punti di flesso. Tracciare un grafico approssimativo della funzione.

Soluzione

Esercizio 2 Si discuta il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \left(n^2 + \sin(e^n)\right)}{3^n}$.

Soluzione

Poniamo $a_n = \dfrac{2^n \left(n^2 + \sin(e^n)\right)}{3^n}$ e osserviamo che $\sin(e^n) \geq -1$ quindi $a_n > 0$ per ogni $n \geq 1$. Possiamo applicare il criterio del rapporto ottenendo

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}\left((n+1)^2 + \sin(e^{n+1})\right)}{3^{n+1}} \frac{3^n}{2^n\left(n^2 + \sin(e^n)\right)} = \frac{2}{3} \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^2 + \sin(e^{n+1})}{n^2 + \sin(e^n)} = \frac{2}{3}.$$

Dato che $\dfrac{2}{3} < 1$ la serie converge.

Esercizio 3 Trovare i punti stazionari della funzione

$$f(x, y) = x^3 + 15x^2 - 20y^2 + 10$$

e determinare se si tratta di punti di massimo locale, di minimo locale o di sella.

Soluzione